

بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِیْمِ

نمونه سوالات مرحله می دوم المپیاد نجوم

فروردین ماه ۱۳۸۷

طراحان سوالات:

عرفان اسماعیلی - صدر اجزایری - آرش دلجانی

سید امیر سادات موسوی - سید صدر اصدralدینی - عباس علنیراده

جدول ثوابت فیزیکی و نجومی

$G = 6.67 \times 10^{-11} N.m^2.kg^{-2}$	ثابت جهانی گرانش
$c = 3.00 \times 10^8 m .s^{-1}$	سرعت نور در خلأ
$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} w.m^{-2} .k^{-4}$	ثابت استفان بولتزمان
$A.U = 1.50 \times 10^{11} m$	واحد نجومی
$M_{sun} = 1.99 \times 10^{30} kg$	جرم خورشید
$M_e = 5.97 \times 10^{24} kg$	جرم زمین
$R_{sun} = 6.96 \times 10^8 m$	شعاع خورشید
$R_e = 6.38 \times 10^6 m$	شعاع زمین
$R_m = 1.73 \times 10^6 m$	شعاع ماه
$27.322 days$	ماه نجومی
$27.555 days$	ماه آنومالی
$27.212 days$	ماه ازدهایی
$29.531 days$	ماه هلالی
$e = 0.0167$	خروج از مرکز مدار زمین
$e = 0.054$	خروج از مرکز مدار ماه
$N_A = 6.02 \times 10^{23}$	عدد آووگادرو
$i = 5^\circ.15$	میل مداری ماه نسبت به دایره البروج
$\varepsilon = 23^\circ.45$	میل مداری استوای زمین نسبت به دایره البروج

عرفان اسماعیلی

- ۱- در روز ۱۸ اردیبهشت ماه ۱۳۸۷ شخصی در شهر همدان (عرض: $۳۴/۸$ شمالی و طول: $۴۸/۵$ شرقی) می خواهد به سمت شهر رشت (عرض: ۳۷ شمالی و طول: $۴۹/۵$ شرقی) روی یک خط مستقیم حرکت کند. او برای این کار می خواهد در یک لحظه خاص به سمت ستاره ای با میل $+۵۰$ درجه و بعد ۱۸ ساعت رفته و از آن پس به راه خود در مسیر مستقیم ادامه دهد. او در چه ساعتی باید به سمت ستاره پیش برود؟
- ۲- دو ماهواره در یک مدار استوایی و بیضوی با خروج از مرکز $۰/۳۳$ و شعاع مدار ۹۸۵۰ کیلومتر، پادساعتگرد در حال گردشند. وقتی ماهواره اول در اوج است. ماهواره دوم در حضیض قرار دارد. الف) کمترین جدایی زاویه ای دو ماهواره از دید ناظری در مرکز زمین چقدر است؟ ب) در حالتی که دو ماهواره کمترین فاصله را از یکدیگر دارند، ناظری در استوا ماهواره شرقی را روی افق می بیند، ارتفاع ماهواره ی دیگر چقدر است؟

صدرا جزایری

- ۳- زمان رخداد یک بارش شهابی را دقیقاً زمانی در نظر بگیرید که زمین به نقطه ی تقاطع مدارش با مدار دنباله دار برسد. فرض کنید در دو تاریخ t_1 و t_2 ، بارش های شهابی اتفاق می افتد که هر دو مربوط به یک دنباله دار هستند. خروج از مرکز مدارها را ۰ و $۱/۵$ و زاویه ی بین دو مدار را ۳۰ درجه بگیرید. الف) اگر t_1 دقیقاً اول بهار باشد، با ذکر راه حل، دقیق t_2 را بدست آورید. (یک سال را $۳۶۵/۲۴۲۲$ روز بگیرید.) ب) فرض کنید کانون بارش شهابی در t_1 ، در عرض های سماوی مثبت و کانون t_2 در عرض های سماوی منفی باشند. فاصله ی زاویه ای دو کانون را بدست آورید. ج) کانون t_1 در کدام صورت فلکی می افتد؟
- ۴- یک شاخص عمودی به طول $1m$ در مکان ی به عرض φ قرار دارد. در روزی از سال میل خورشید δ است. در کل مسئله برای سهولت می توانید φ را مثبت فرض نمایید. الف) اثبات کنید مسیر روزانه ی نوک سایه ی شاخص بخشی از یک مقطع مخروطی است. در این قسمت و قسمت های بعدی مسئله لازم نیست معادله ای برای این مسیر پیدا کنید. ب) حدودی برای عرض جغرافیایی پیدا کنید تا مسیر (۱) دایره (۲) بیضی (۳) هذلولی شود. این شرط می تواند به میل خورشید بستگی پیدا کند. ج) برای حالت ۲ طول نیم محور بزرگ مقطع $a(\varphi, \delta)$ را پیدا کنید. د) برای حالت ۳ خروج از مرکز مقطع $e(\varphi, \delta)$ را پیدا کنید. فرض کنید تابعیت a و e بر حسب عرض و میل خورشید تغییر نکند. (فرض کنید در هذلولی یک شاخه دارای a مثبت و دیگری دارای a منفی است.) ه) رفتار $e(\varphi, \delta)$ را در حد $\delta \rightarrow 0$ برای عرض های مختلف تحلیل کنید. و) در یک شهر استوایی آیا روزی وجود دارد که کانون مقطع بر پای عمود شاخص منطبق شود؟ اگر بله میل خورشید را در آن روزها پیدا کنید.
- ۵- مدار سیاره ای دارای خروج از مرکز e است. محور دوران این سیاره عمود بر صفحه ی مداری ی آن است. هر دو دوران وضعی و انتقالی ی این سیاره تناوب و جهت یکسان دارند. ناظر واقع در استوای سیاره زمان t از سال حرکت روزانه ی خورشید را از غرب به شرق و زمان t' از سال این حرکت را از شرق به غرب می بیند.

الف) نسبت t'/t را به صورت تابع صریحی از e بدست آورید.
 ب) اگر e به قدری کوچک باشد که بتوان از توان های دوم به بالای آن صرف نظر کرد. نسبت t'/t چقدر خواهد بود؟
 ۶- در اثر برخورد فوتون های گسیلی از یک تابش کننده بر اجسام اطراف آن، نیرویی به آن ها وارد می شود که آن را نیروی تابشی می نامیم.
 یک تابش کننده ی همسان گرد به درخشندگی L در نظر بگیرید که نمودار شدت- طول موج (I_λ) آن در بازه ی صفر تا بی نهایت طول موجی پیوسته است. یک سطح سیاه (جسم سیاه) به مساحت A در فاصله ی r از تابش گر قرار دارد. فرض کنید تمام پرتوهای رسیده از تابش گر بر سطح عمودند.
 نکته ی مهم: مساحت زیر نمودار شدت - طول موج در بازه ی $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$ برابر با شار تابشی خارج شده از تابشگر در همین بازه است. در هر کجای مسئله که به آن احتیاج پیدا کردید می توانید آن را با $S_\lambda^{\lambda+\Delta\lambda}$ نشان دهید.

الف) تکانه ی خطی فوتون به طول موج λ را بدست آورید.
 ب) شار تعداد فوتون های برخورد کننده به صفحه را در بازه ی طول موجی $(\lambda, \lambda + \Delta\lambda)$ با فرض $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \ll 1$ بدست آورید.

ج) نیروی وارد بر این سطح را تنها بر حسب L ، r و A و احياناً یک سری ثابت فیزیکی پیدا کنید.

۷- سیاره ای با سرعت زاویه ای ω به دور خود می گردد. صفحه ی استوای این سیاره به اندازه ی E با صفحه ی مداری اش زاویه می سازد. مدار سیاره دایره ای است و سرعت زاویه ای انتقالی اش در مدار Ω است. در این سیاره $\omega \gg \Omega$ برقرار نیست تا بتوان در طول یک روز خورشیدی میل خورشید را ثابت در نظر گرفت.

فرض کنید در عرض جغرافیایی ψ ، در هنگام طلوع خورشید، میل آن دقیقاً صفر باشد.
 الف) چه شرطی صادق باشد تا دقیقاً یک سال دیگر همین اتفاق تکرار شود؟
 ب) فرض کنید t ثانیه بعد از طلوع خورشید غروب کند. معادله ای به صورت $f(t) = 0$ باید حل شود تا t پیدا گردد. f را بدست بیاورید.

ج) اگر $\psi = 0$ ، t را به ازای $\Omega = \frac{\pi}{12} \text{ rad.h}^{-1}$ و $\omega = 0.1$ و $\varepsilon = \frac{\pi}{3}$ با دقت 1 دقیقه بدست آورید.

۸- عرق چین به ناحیه ای از کره اطلاق می شود که نقاط روی آن تشکیل یک دایره می دهند. مرکز عرق چین نقطه ای است که فاصله ی آن از تمام نقاط روی عرق چین (فاصله ی روی کره) یکسان است. به این مقدار ثابت شعاع عرق چین می گوئیم.
 یک مثلث کروی به رئوس A و B و C و اضلاع a و b و c در نظر بگیرید. فرض کنید تمام اجزا در این مثلث از 180° کوچکتر اند.

الف) ثابت کنید فقط یک عرق چین وجود دارد که می تواند در مثلث بالا محاط شود و به سه ضلع آن مماس گردد.
 ب) شعاع زاویه ای عرق چین (a) را بر حسب زاویای مثلث بدست آورید. (بدست آوردن یکی از نسبت های مثلثاتی آن کافی است).

۹- نیم محور بزرگ (بر حسب واحد نجومی) a و خروج از مرکز عطارد را e بگیرید. بی هنجاری واقعی (θ true anomaly) عطارد را θ بنامید. مدار های عطارد و زمین را هم صفحه بگیرید.
 بیشترین گشیدگی (γ) را تعریف می کنیم زاویه ی بین خورشید و عطارد از دید راصد زمینی هنگامی که تغییرات این زاویه از حالت صعودی به حالت نزولی تغییر می کند.
 الف) γ را بر حسب θ بدست آورید.
 ب) در چه θ ای، γ بیشترین مقدار است؟
 ج) با فرض $e = 0.2$ ، $a = 0.5$ در یک حالت بیشینه ی گاما سرعت مماسی عطارد را برای ناظر زمین مرکز حساب کنید.

آرش دلجانی

۱۰- ماهواره ای در مدار بیضوی با نیم محور بزرگ $(a=)15000\text{ km}$ خروج از مرکز $(e=) 0/5$ حول زمین می چرخد. میل مدار نسبت به استوا $(i=) 30^\circ$ است. جهت گیری بیضی به گونه ای است که حضیض مدارش نیز 30° بالای استواست. به عبارت دیگر آرگمان حضیض $(\omega=) 90^\circ$ است.

الف) اندازه ی مولفه ی مماسی سرعت ماهواره (V_θ) را بر حسب آنومالی حقیقی (θ) و a و e بیابید. هدف ما این است که ماهواره را از مدار کنونی اش به مداری قطبی با شکل (e, a) مشابه به مدار فعلی اش بفرستیم. (مدار قطبی مداری است که از فراز قطب شمال بگذرد). برای این کار فقط مجاز هستیم که یک بار تغییر سرعت (ΔV) اعمال کنیم. واضح است که برای چنین مانور مداری مناسب ترین روش این است که تنها در مولفه ی مماسی سرعت (V_θ) تغییر جهت ایجاد کنیم و مولفه ی شعاعی را تغییر ندهیم.

ب) اگر ΔV را در جایی از مدار که آنومالی حقیقی θ است اعمال کنیم زاویه ی بین سرعت مماسی در مدار اول و سرعت مماسی در مدار ثانویه را بر حسب θ و ثوابت بدست آورید و آن را η بنامید. (راهنمایی: V_θ در مدار دوم در راستای نصف النهار گذرنده از آن نقطه است.)

پ) اندازه ی تغییر سرعت (ΔV) لازم برای تغییر جهت سرعت مماسی V_θ به اندازه ی زاویه ی η را بر حسب θ و ثوابت پیدا کنید.

ت) این تغییر سرعت (ΔV) در چه آنومالی حقیقی (θ) ی مینیمم است؟ پاسخ را به صورت معادله ای مانند $f(\theta)=0$ بیان کنید. لازم نیست مقدار f را بدست آورید.

۱۱- تلسکوپ مریخی و فرورسرخ جیمز وب (JWST) در سال ۲۰۱۲ در مدار فرار خواهد گرفت. این تلسکوپ در نقطه ی لاگرانژی L_2 سیستم زمین-خورشید قرار داده می شود. نقطه ی لاگرانژی نقطه ای است روی خط واصل زمین و خورشید و در طرف دیگر زمین که با سرعت زاویه ای زمین و خورشید دور مرکز جرم آنها می چرخد. در این نقطه مجموع نیروی گرانشی وارد بر جسم با نیروی لازم برای چرخیدن جسم حول مرکز جرم سیستم برابری می کند.

الف) فرض کنید مرکز جرم سیستم زمین- خورشید در مرکز خورشید واقع است و معادله ای پیدا کنید که فاصله ی تلسکوپ جیمز وب تا خورشید بر حسب AU مستقیماً از روی آن بدست آید. این فاصله را r بنامید.

ب) چون این تلسکوپ در امواج فرورسرخ رصد می کند باید دمای ابزار آن پایین (حدود ۴۰ کلوین) نگه داشته شود و از تابش فرورسرخ مصون باشد. اگر معادله ای که در قسمت الف بدست آوردید درست باشد برای $r=1.01003\text{ AU}$ را خواهد داد. با این فرض نسبت قطر زاویه ای زمین به قطر زاویه ای خورشید از دید تلسکوپ را بدست آورید.

پ) اگر تلسکوپ را توسط یک سیر تابشی فلزی از تابش ماه و زمین و خورشید محفوظ بداریم بیشترین زاویه ای که این سیر باید پوشش دهد چقدر است؟

پ) اگر زمین یکباره از مدارش خارج شود مدار تلسکوپ دور خورشید به شکل یک بیضی در خواهد آمد. خروج از مرکز و نیم محور بزرگ این بیضی را بیابید.

سید امیر سادات موسوی

۱۲- ماهواره ای که همواره بر فراز استوای سطح زمین در حال حرکت است، توسط ناظری در عرض جغرافیایی 30° درجه جنوبی مشاهده می شود. اگر شعاع مدار این ماهواره ۲ برابر شعاع زمین باشد، حداقل سمت آن از دید این ناظر چقدر است؟

۱۳- فرض کنید بخواهیم از نیروی گرانش برای انتقال بسته های پستی بین شهرهای مهم ایران استفاده کنیم. برای این کار بسته ها را در مدارهای دایره ای بر روی سطح زمین بین شهرها جابجا می کنیم. واضح است که ابتدا باید مسیر مدار را بر روی سطح زمین هموار کنیم. زمان لازم (T) برای انتقال

یک بسته ی پستی بین دو شهر با طول و عرض جغرافیایی l_1, ϕ_1 و l_2, ϕ_2 چقدر می شود؟ از دوران زمین و اصطکاک بسته ها با سطح زمین صرف نظر کنید.

۱۴- فوتومتری را هر روز به سمت خورشید قرار می دهیم و مقدار شار انرژی خورشید را بصورت نسبتاً دقیق بدست می آوریم. پس از گذشت یک سال ۳۶۵ داده خواهیم داشت:
 الف) بیشترین و کمترین مقدار شار خورشید را بدست آورید؟
 ب) میانگین این ۳۶۵ داده چقدر است؟
 ج) حدوداً چه تعدادی از داده ها کمتر از مقدار میانگین هستند؟

صدرا صدرالدینی

۱۵- نیروی گرانش ماه بر روی زمین، علاوه بر چرخاندن زمین به دور مرکز جرم دستگاه زمین- ماه، باعث ایجاد نیروهای کششی سطح زمین می شود، که به آنها نیروهای جذر و مدی می گوئیم.
 الف) بیشترین نیروی جذر و مدی ماه و خورشید بر روی زمین را جداگانه محاسبه کرده و با یکدیگر مقایسه کنید.

نیروهای جذر و مدی باعث ایجاد اصطکاک می شوند و این اصطکاک بعد از مدت طولانی باعث می شود دوره تناوب انتقالی و وضعی اجسام یکسان شود، که به این حالت قفل مداری می گویند. چنانچه این امر برای ماه اتفاق افتاده است اما برای زمین نیفتاده است.
 ب) بدون در نظر گرفتن تاثیرات گرانشی خورشید، با دقت حدود ۱۰ درصد محاسبه کنید در حالتی که سیستم زمین و ماه نسبت به یکدیگر کاملاً قفل شده باشند، طول روز در زمین چند برابر خواهد شد. فرض کنید مدار ماه دایروی است و دایروی می ماند.
 زمین و ماه را کره های همگن در نظر بگیرید، جرم ماه یک هشتم جرم زمین است.

۱۶- سیاره ای فرضی در فاصله ی یک واحد نجومی از خورشید وجود دارد.
 الف) بازه ای برای آلودی (ضریب بازتاب) سیاره پیدا کنید که آب در این سیاره مایع باشد. سیاره جسم سیاه فرض شود.
 ب) با فرض اینکه آلودی سیاره صفر است، حداقل جرم سیاره چقدر باشد تا بتواند گاز اکسیژن را در جو خود نگه دارد؟ عدد جرمی میانگین اکسیژن ۱۶ گرفته شود.

۱۷- مساحت مشترک بین دو بیضی به معادلات زیر در دستگاه قطبی را بیابید.

$$r = \frac{128}{1 - 0.6 \cos \theta} \quad r = \frac{150}{1 + 0.5 \cos \theta}$$

۱۸- مدار ماه در دو نقطه صفحه دایره البروج را قطع می کند. به این دو نقطه گره می گویند.
 الف) با در نظر گرفتن حرکت گره ها، محاسبه کنید فاصله زمانی بین دو هم خط شدن متوالی گره ها با خورشید چقدر است.
 ب) هنگامی که گره ها با خورشید در یک خط هستند، ماه در گره نزدیکتر به خورشید قرار دارد. حساب کنید در لحظه هم خط شدن بعدی، آیا امکان مشاهده خورشید گرفتگی یا ماه گرفتگی در زمین وجود دارد؟

۱۹- دو تلسکوپ اپتیکی از یک شرکت سازنده به مشخصات زیر داریم. قطر دهانه هر یک را پیدا کنید.
 تلسکوپ ۱: قدر حدی m ، توان تفکیک α ثانیه قوسی
 تلسکوپ ۲: قدر حدی $m+1$ ، توان تفکیک $\alpha - 0.21$ ثانیه قوسی

۲۰- ماهواره ای در مدار دایروی و عمود بر صفحه استوا و به دوره تناوب ۲۷ ساعت به دور زمین می گردد. ناظری این ماهواره را در سمت الراس خود مشاهده می کند و بعد از ۱۲ ساعت دوباره آن را در سمت الراس خود می بیند. از این زمان برای ناظر:
 الف) حدوداً چقدر طول می کشد تا ماهواره غروب کند.
 ب) چقدر طول می کشد تا ماهواره دوباره به سمت الراس بیاید.

۲۱- استوای خورشید حدود ۷ درجه با صفحه دایره البروج اختلاف دارد. فرض کنید یک لکه خورشیدی در عرض ۵۱ درجه خورشید هر ۲۶ روز یکبار به دور خورشید گردش می کند. بیشترین مدت رصد بی وقفه این لکه برای مجموعه رصدگران زمینی حدوداً چقدر است؟ از اثرات اختلاف منظر چشم پوشی کنید و دوران زمین به دور خورشید را در نظر نگیرید.

۲۲- صفحه ای نازک به مساحت A و m جرم را از در هوای بارانی از ارتفاع بلندی رها می شود. فرض کنید صفحه همیشه موازی زمین می ماند. نیرویی که به صفحه از طریق مقاومت هوا وارد می شود برابر با است αv که v سرعت صفحه نسبت به هوا است و α یک ثابت که به مشخصات صفحه و هوا وابسته است. n چگالی عددی قطرات در حجم فضا است و u سرعت ذرات باران نسبت به هوا است که هر دو ثابت فرض می شوند. بیشترین و کمترین سرعت حدی صفحه را بر حسب پارامترهای تعریف شده و u ، شتاب گرانش، بدست آورید.

عباس علیزاده

۲۳- ماهواره ای استوایی در مداری بیضوی با خروج از مرکز e و دوره تناوبی برابر با یک شبانه روز نجومی، هم جهت با کره ی زمین به دور مرکز زمین می گردد. ناظری در عرض جغرافیایی Φ در حال رصد اجرام آسمانی می باشد. در این لحظه ماهواره در حوضی مداری خود قرار دارد و اختلاف طول جغرافیایی آن با ناظر برابر L_0 است.

الف) ارتفاع ماهواره را در آن لحظه برای ناظر ، برحسب نیم قطر بزرگ مدار ماهواره (a) ، e ، Φ و L_0 بدست آورید.

ب) چه شرطی برقرار باشد تا ناظر بتواند ماهواره را آن لحظه رصد کند؟ (از تاثیر نور خورشید صرف نظر کنید)

اکنون خروج از مرکز مدار ماهواره را کوچک در نظر بگیرید، به طوری که بتوان از جملات مرتبه ی دوم e به بالا صرف نظر کرد ، بنابر این می توان گفت :

$$\theta = \omega t + 2e \sin(\omega t)$$

که در رابطه ی فوق t ، ω و θ به ترتیب ، مدت زمان سپری شده از حوضی، سرعت زاویه ای میانگین مداری ماهواره و زاویه ی بین بردار حامل ماهواره از مرکز زمین و جهت حوضی می باشند. با توجه به رابطه ی بالا:

پ) بیشینه ی اختلاف طول جغرافیایی ماهواره و ناظر (L_{max}) را بدست آورید.

ت) اکنون با همان فرض کوچک بودن خروج از مرکز و با داشتن a ، Φ و دوره تناوب ماهواره (P) رابطه ی بین L_0 و e را به گونه ای بیابید که ماهواره رگز برای ناظر غروب نکند. توجه: در هر قسمت از این سوال بدست آوردن توابع مثلثاتی زوایای خواسته شده کافی می باشد.